Mihaela Berindeanu
Gyuszi Szép
Cristina Văcărescu

ALGEBRĂ

clasa a VII-a

-excelență-

Biblioteca Olimpiadelor de Matematică
45

Editura GIL
Zalău

Cuprins

Capitolul 1

Probleme recapitulative din clasa a VI-a

1. *Se dau numerele* 1, 2, 3, 4, ..., 2019. *Să se găsească cel mai mare număr natural m care are următoarea proprietate: dacă se vor elimina oricare m numere dintre cele date, atunci printre cele $2019 - m$ numere rămase există două numere dintre care unul se divide cu celălalt.*

Concursul „Cristian S. Calude", 2019

2. *Arătați că:*

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 2017 \cdot 2017! < 2018!,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Concursul „Matematica de drag", 2018

3. *Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația*

$$(x+1)(y+2)(z+3) = xyzt^3,$$

știind că $z \leq y$.

Gheorghe Boroica, Concursul „Grigore C. Moisil", 2019

4. *Câți divizori ai numărului* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$ *sunt pătrate perfecte?*

Concursul „Laurențiu Panaitopol", 2018

5. *Andrei și Vlad joacă următorul joc: din numărul* 2019^{2019} *ei scad succesiv cubul unui număr natural nenul* n, $n \leq 12$. *Câștigă jucătorul după mutarea căruia se ajunge la un număr care este un multiplu al lui* 13 *și este mai mic decât* 12^3. *Dacă începe Andrei, demonstrați că el poate găsi o strategie care îi permite să câștige, oricare ar strategia lui Vlad.*

Cristina Bornea, Concursul „Ion Barbu-Dan Barbilian", 2019

6. *Să se afle numerele naturale de trei cifre* $\overline{xyz}$ *cu proprietatea că* $\dfrac{34}{x^2+y^2+z^2}$ *este număr natural.*

Etapa națională, 1986

7. *Un număr de trei cifre are suma cifrelor egală cu* 7. *Să se arate că dacă numărul se divide cu* 7, *atunci cifra zecilor este egală cu cifra unităților.*

Etapa națională, 1987

8. *Să se determine numărul natural care satisface simultan următoarele condiții:*

a) *dacă îl împărțim la* 4, *atunci obținem restul* 3;

b) *dacă îl împărțim la* 10, *atunci obținem restul* 1;

c) *dacă îl împărțim la* 12, *atunci obținem restul* 3;

d) *suma câturilor celor trei împărțiri de mai înainte este mai mare cu* 16 *decât o treime din numărul dat.*

Etapa națională, 1988

9. *Să se determine numerele naturale* $\overline{abc}$ *pentru care suma pătratelor cifrelor sale să fie pătratul unui număr prim de forma* $3k+2$, *unde* $k \in \mathbb{N}$.

Etapa națională, 1989

10. *Fie a, b, c trei numere naturale nenule astfel încât $a \cdot b < c$. Să se arate că $a + b \leq c$.*

I. Coroian, Etapa națională 1989

11. *Să se determine $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.*

Etapa națională, 1990

12. *Să se demonstreze că există numerele pozitive a, b, c și d pentru care $\frac{5a+b}{5c+d} = \frac{6a+b}{6c+d}$ și $\frac{7a+b}{7c+d} = 8$, apoi să se calculeze $\frac{9a+b}{9c+d}$.*

Dan Zaharia, Etapa națională, 1991

13. *Fie a un număr natural prim cu 10, adică $(a, 10) = 1$. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n, astfel încât ultimele 1992 de cifre ale numărului a^n să fie $\underbrace{00\ldots00}_{1991 \text{ cifre}}1$.*

N. I. Nediță, Etapa națională, 1992

14. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și s_n suma tuturor numerelor naturale x astfel încât:*

$$(n-1)^2 \leq x < (n+1)^2.$$

a) *Să se arate că s_n este un număr divizibil cu 6.*

b) *Să se determine n astfel încât $s_n = 1386$.*

Șt. Smarandache, Etapa națională, 1993

15. *La o masă circulară sunt așezate șapte persoane. Vârsta fiecăreia este egală cu media aritmetică a vârstelor persoanelor alăturate. Să se arate că suma vârstelor tuturor persoanelor este multiplu de 7.*

R. Bairac, Etapa națională, 1994

16. *Să se arate că oricare ar fi trei numere naturale impare, există un număr natural impar astfel încât suma pătratelor celor patru numere să fie pătrat perfect.*

D. Acu, Etapa națională, 1995

17. *Fie a un număr natural nenul. Să se demonstreze că a este pătrat perfect dacă și numai dacă, oricare ar fi $b \in \mathbb{N}^*$, există $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + bc$ să fie pătrat perfect.*

Bogdan Enescu, Etapa națională, 1997

18. *Dacă a, b, c sunt numere întregi nenule, $a \neq c$ și $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$, atunci $a^2+b^2+c^2$ este număr natural compus.*

Șt. Smarandache, Etapa națională, 1999

19. *Să se arate că nu există numere întregi a și b astfel încât:*

$$a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3 = 2001.$$

Etapa națională, 2001

20. *Să se calculeze numărul maxim de elemente care pot fi alese din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2003\}$ astfel încât suma oricăror două elemente alese să nu fie divizibilă cu 3.*

Etapa națională, 2003

21. *Arătaţi că $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$, suma $2x^2 + 3y^2$ nu poate avea 2019 divizori.*

Mihaela Berindeanu

22. *Aflaţi tripletele de numere prime (p, q, r) care verifică relaţia $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$.*

Lista scurtă JBMO, 2014

23. *Fie a, b, c trei numere prime mai mari decât 3, între ele existând relaţia $a < b < c$ şi fie $N = (b-a)(c-a)(c-b)$.*

a) Arătaţi că numărul 2020^N este un cub perfect.

b) Arătaţi că numărul $2^{N+2} + 3^N$ este compus.

c) Determinaţi ultimele două cifre ale numărului 7^N.

Mihaela Berindeanu

24. *Determinaţi tripletele de numere naturale (a, b, c) astfel încât suma $3^a + 3^b + 3^c$ să fie un pătrat perfect.*

Olimpiada Naţională Turcia, 2017

25. *Studiaţi care dintre numerele $2011!$ şi 1006^{2011} este mai mare.*

Olimpiada Naţională Bangladeş, 2011

26. *Fie $b \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $b \geq 6$. Dacă b reprezintă o bază de numeraţie, arataţi că numărul $\overline{352}_{(b)}$ nu poate fi pătrat perfect.*

Mihaela Berindeanu

Soluțiile problemelor propuse

1. Soluție. Să arătăm că niciun număr $m \geq 1009$ nu are proprietatea din enunțul problemei. Într-adevăr, dacă $m \geq 1009$, atunci, eliminând numerele de la 1 la m, rămânem cu numerele $1010, 1011, 1012, \ldots, 2019$. Printre aceste nu există niciun număr care să se dividă la altul.

Arătăm că $m = 1008$ are proprietatea cerută. Vom demonstra că printre oricare 1011 numere luate de la 1 la 2019 se vor găsi două numere dintre care unul de divide la celălalt.

Punem în corespondență fiecărui număr (dintre cele 1011) cel mai mare divizor al său impar. Numărul $2^k(2n+1)$ este pus în corespondență cu numărul $2n+1$. Numere impare mai mici sau egale cu 2019 sunt în total 1010. Prin urmare, la anumite două numere din cele 1011 le va corespunde

Capitolul 2

Mulțimea numerelor reale

2.1 Numere raționale. Numere iraționale. Calcule cu radicali

Probleme rezolvate

1. *Fie numerele raționale pozitive* $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ *astfel încât suma lor este* 1 *și*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2017}}{a_{2018}} = \frac{1}{3}.$$

a) *Arătați că* $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017} = \dfrac{3^{2018} - 1}{2}$.

b) *Găsiți* a_{2018}.

Etapa locală, Bacău, 2019

Soluție. a) Avem $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017}$ și $3S = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017} + 3^{2018}$. Prin scădere, obținem că $2S = 3^{2018} - 1$, de unde va rezulta că $S = \dfrac{3^{2018} - 1}{2}$.

b) Din $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{1}{3}$ rezultă că $a_2 = 3a_1$. Din $\dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{1}{3}$ rezultă că $a_3 = 3a_2$, adică vom avea $a_3 = 3^2 a_1$. Analog se obține că $a_4 = 3^3 a_1$, $a_5 = 3^4 a_1, \dots,$ $a_{2018} = 3^{2017} a_1$.

Știm că $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2018} = 1$. De aici deducem că $a_1 + 3a_1 + 3^2 a_1 + \dots + 3^{2017} a_1 = 1 \Leftrightarrow a_1(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2017}) = 1 \Leftrightarrow a_1 \cdot \dfrac{3^{2018} - 1}{2} = 1$, iar de aici va rezulta că $a_1 = \dfrac{2}{3^{2018} - 1}$.

$$a_{2018} = 3^{2017} a_1 = 3^{2017} \cdot \frac{2}{3^{2018}-1} = \frac{2 \cdot 3^{2017}}{3^{2018}-1}.$$

2. *Arătați că numărul* $\sqrt{(1+2+3+\cdots+n)^2+(n+1)^3}$ *este rațional, pentru orice* n *număr natural.*

Etapa locală, Brăila, 2019

Soluție. $\sqrt{(1+2+3+\cdots+n)^2+(n+1)^3} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3} = \sqrt{(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)} = (n+1)\sqrt{\frac{n^2+4n+4}{4}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, care este un număr rațional, pentru orice n număr natural.

3. *Fie* x, y *numere reale astfel încât* $x+y$, $x+y^3$ *și* $x+y^5$ *sunt numere raționale. Arătați că* x *și* y *sunt numere raționale.*

Mihaela Berindeanu, G.M. 4/2018

Soluție. Pentru $y=-1$, avem că $x-1$ este număr rațional, de unde deducem că x este rațional.

Pentru $y=0$, avem că $x+0=x$ este rațional.

Pentru $y=1$, avem că $x+1$ este număr rațional, de unde rezultă că x este număr rațional.

Să presupunem mai departe că $y \notin \{-1, 0, 1\}$.

Din $x+y$ și $x+y^3$ numere raționale rezultă că $x+y^3-x-y=y^3-y$ este număr rațional. Analog, y^5-y^3 este rațional. Atunci $\frac{y^5-y^3}{y^3-y} = \frac{y^3(y^2-1)}{y(y^2-1)} = y^2 = q$ este rațional.

Avem $x+y^5 = x+q^2y$ și $x+y^3 = x+qy$ numere raționale. Prin scăderea relațiilor obținem că $q^2y-qy = y(q^2-q)$ este număr rațional. Cum q^2-q este număr rațional nenul, deducem imediat că y este număr rațional.

Din y și $x+y$ numere raționale va rezulta că x este număr rațional.

4. *Demonstrați că* $a=\sqrt{2018^{2020}+2020^{2018}+2019}$ *este irațional.*

Etapa locală, Constanța, 2019

Soluție. $2018^{2020} + 2020^{2018} + 2019 = (M_3 - 1)^{2020} + (M_3 + 1)^{2018} + M_3 = M_3 + 1 + M_3 + 1 + M_3 = M_3 + 2$. Cum un număr de forma $M_3 + 2$ nu poate fi pătrat perfect, deducem că $a = \sqrt{M_3 + 2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. *Determinați cifrele a și b astfel încât* $\sqrt{\overline{b7b}} = \overline{ab}$.

Etapa locală, Dolj, 2019

Soluție. Deoarece pătratul numărului ab se termină cu cifra b, trebuie să încercăm pentru b doar valorile 1, 5, 6. Cum 171 şi 576 nu sunt pătrate perfecte, obţinem doar soluţia $a = 2$, $b = 6$.

6. *Fie numărul* $a = 123456789101112\ldots2019$ *obținut prin alăturarea cifrelor numerelor* $1, 2, 3, \ldots, 2019$. *Determinați cea de-a patra cifră a numărului* $\sqrt{a}$.

Etapa locală, Mureș, 2019

Soluție. Numărul a are $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 1020 = 6969$ de cifre, adică un număr impar de cifre. Aplicând algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, obținem că:

$$\sqrt{a} = \sqrt{1'23'45'67'\ldots} = 1111\ldots,$$

de unde rezultă că a patra cifră a numărului $\sqrt{a}$ este egală cu 1.

7. *Se consideră numărul* $A = \sqrt{\overline{a,b(cd)} + \overline{b,c(da)} + \overline{c,d(ab)} + \overline{d,a(bc)}}$, *unde a, b, c, d sunt cifre nenule diferite.*

a) *Demonstrați că* $1 \leq 0,3 \cdot A \leq \sqrt{3}$.

b) *Câte numere* $\overline{abcd}$ *sunt dacă* $A \in \mathbb{Q}$?

Soluție. **a)** $\overline{a,b(cd)} = \dfrac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{990} = \dfrac{990a + 99b + 10c + d}{990}$. Analog, $\overline{b,c(da)} = \dfrac{990b + 99c + 10d + a}{990}$, $\overline{c,d(ab)} = \dfrac{990c + 99d + 10a + b}{990}$ și $\overline{d,a(bc)} = \dfrac{990d + 99a + 10b + c}{990}$. Atunci $A = \sqrt{\overline{a,b(cd)} + \overline{b,c(da)} + \overline{c,d(ab)} + \overline{d,a(bc)}} = \sqrt{\dfrac{1100(a+b+c+d)}{990}} = \sqrt{\dfrac{10(a+b+c+d)}{9}} = \dfrac{\sqrt{10(a+b+c+d)}}{3}$.

Cum a, b, c, d sunt cifre nenule diferite, avem că:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \leq a + b + c + d \leq 9 + 8 + 7 + 6 = 30.$$

Atunci $\dfrac{\sqrt{10\cdot 10}}{3} \le A \le \dfrac{\sqrt{10\cdot 30}}{3}$, adică $\dfrac{10}{3} \le A \le \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$. Înmulțind aceste relații cu $0,3$, obținem că $1 \le 0,3 \cdot A \le \sqrt{3}$.

b) Cum $A = \dfrac{\sqrt{10(a+b+c+d)}}{3} \in \mathbb{Q}$, deducem că $a+b+c+d = 10k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, $10 \le a+b+c+d \le 30$. Atunci va rezulta că $10 \le 10k^2 \le 30$. Așadar, $1 \le k^2 \le 3$. De aici obținem $k = 1$, iar de aici rezultă că $a+b+c+d = 10$. Cum $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ sunt cifre distincte, deducem că există $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ de numere $\overline{abcd}$ pentru care $A \in \mathbb{Q}$.

8. *Fie a și b două numere naturale nenule. Arătați că $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ este rațional dacă și numai dacă a și b sunt pătrate perfecte.*

Soluție. $\boxed{\Leftarrow}$ Știm că $a, b \in \mathbb{N}^*$ sunt pătrate perfecte. Atunci există $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a = k^2$ și $b = \ell^2$. De aici rezultă că $\sqrt{a}+\sqrt{b} = k+\ell \in \mathbb{Q}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Știm că $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Trebuie să arătăm că a și b sunt pătrate perfecte.

$\sqrt{a}+\sqrt{b} = x \in \mathbb{Q}^*$. Atunci $\sqrt{b} = x - \sqrt{a}$. Prin ridicare la pătrat, obținem $b = x^2 + a - 2x\sqrt{a}$, adică $\sqrt{a} = \frac{x^2+a-b}{2x} \in \mathbb{Q}$, ceea ce conduce, în condițiile problemei, la faptul că a este pătrat perfect. Analog, b este pătrat perfect.

9. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{ac}{b} = \dfrac{1}{5}$ și $\dfrac{ab}{c} = 1$. Arătați că $\sqrt{7a^2+8b^2-c^2}$ este număr natural prim.*

Mihaela Baltă, Etapa locală, Brăila, 2018

Soluție. Din $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{ac}{b} = \dfrac{1}{5}$ și $\dfrac{ab}{c} = 1$ rezultă că $a = 3bc$, $b = 5ac$ și $c = ab$. Prin înmulțirea acestor trei relații, avem $abc = 15(abc)^2$. Cum $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, deducem că $abc = \dfrac{1}{15}$.

$$a = 3bc \iff a^2 = 3abc \iff a^2 = \frac{1}{5}.$$

$$b = 5ac \iff b^2 = 5abc \iff b^2 = \frac{1}{3}.$$

$$c = ab \iff c^2 = abc \iff c^2 = \frac{1}{15}.$$

Obținem că $\sqrt{7a^2+8b^2-c^2} = \sqrt{\dfrac{7}{5}+\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{15}} = \sqrt{\dfrac{60}{15}} = 2$, care este număr natural prim.

10. *Calculați suma*

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{2k+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{nk+1}+\sqrt{nk+k+1}},$$

unde k și n sunt numere naturale, $k \neq 0$.

Soluție. După raționalizarea tuturor fracțiilor care apar în sumă, avem:

$$S = \frac{1}{k}\left[(\sqrt{k+1}-1) + (\sqrt{2k+1}-\sqrt{k+1}) + \cdots +\right.$$
$$\left.+(\sqrt{nk+k+1}-\sqrt{nk+1})\right] = \frac{\sqrt{nk+k+1}-1}{k}.$$

11. *Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{20^n-18^n}{19}}$ este rațional.*

Etapa națională, 2018

Soluție. Pentru $n = 0$, avem că $\sqrt{\dfrac{20^0-18^0}{19}} = 0 \in \mathbb{Q}$.

Să presupunem acum că $n \geq 1$. Cum $\sqrt{\dfrac{20^n-18^n}{19}}$ trebuie să fie număr rațional, rezultă că există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $20^n - 18^n = 19x^2$, adică $2^n(10^n - 9^n) = 19x^2$, unde $x \in \mathbb{N}^*$.

$n = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, avem $2^{2m}(10^{2m} - 9^{2m}) = 19x^2$, $x \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x = 2^m y$, cu y impar.

$10^{2m} - 9^{2m} = 19y^2 \iff (10^m - 9^m)(10^m + 9^m) = 19y^2$, cu y impar. Pe de altă parte, $(10^m - 9^m,\ 10^m + 9^m) = 1$.

Cazul 1. Există numerele naturale impare a, b, cu $(a, b) = 1$, $a \cdot b = y$, $10^m + 9^m = 19a^2$ și $10^m - 9^m = b^2$.

$10^m = 9^m + b^2 = M_4 + 1 + M_4 + 1 = M_4 + 2 \implies m = 1, b = 1, a = 1, y = 1, x = 2, n = 2$.

Cazul 2. Există numerele naturale impare a, b, cu $(a, b) = 1$, $a \cdot b = y$, $10^m + 9^m = a^2$ și $10^m - 9^m = 19b^2$.

$10^m = 9^m + 19b^2 = M_8 + 1 + 19(M_8 + 1) = M_8 + 4 \implies m = 2, b = 1, a^2 = 181$, imposibil.

Prin urmare, $n = 0$ sau $n = 2$.